

## 9. Математические методы в экономике, их эволюция и роль

### 9.1. Математические методы и моделирование в экономике

Экономика — одна из тех наук, в которой использование математики столь естественно, столь и необходимо. Действительно, подавляющее число экономических показателей носят количественный характер. Например, валовой национальный продукт, объем экспорта, импорта, темп инфляции, объем выпуска, спрос и предложение, прибыль и т. д. имеют цифровое выражение. Многие экономические показатели тесно взаимосвязаны (спрос и предложение, доход и потребление, инфляция и безработица и т. д.) — это дает основание использовать математические формулы для описания и анализа этих взаимосвязей. Однако в течение длительного времени экономическая наука использовала весьма ограниченный набор математических методов. Математический аппарат, разработанный для задач механики и физики, пытались применить для решения экономических задач. В частности, в экономике широко применялись описания, использующие алгебраические соотношения и обозначения, делались попытки использования аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Системное применение математики в экономических исследованиях фактически началось лишь в XX в. Действительно, математические методы не могут непосредственно применяться к изучаемым экономическим процессам. Они могут использоваться лишь в математических моделях исследуемых явлений. Для их построения требуется, с одной стороны, достаточно глубокое понимание сущности происходящих процессов, с другой — хорошо развитый математический аппарат. И то и другое до XX в. не имели столь высокого развития, да и экономические предпосылки для этого еще не созрели. Хозяйства даже передовых стран были относительно несложными, характеризуются незначительным количеством связей и простой структурой. Все отношения между экономическими субъектами были достаточно очевидны и не требовали серьезного математического обоснования.

Зато экономика XX в., особенно второй его половины, совершила качественный скачок. Экономические процессы, происходящие в пределах практически любого государства, в настоящее время по своей сложности на много порядков превосходят те, с которыми имели дело в XVIII — XIX вв. Современная экономика представляет собой чрезвычайно сложную, динамически развивающуюся систему гигантского масштаба, состоящую из огромного множества элементов, выполняющих разнообразные функции. Управление всей экономикой и отдельными ее элементами является в настоящее время исключительно сложной задачей из-за огромного множества возможных решений, принимаемых на различных уровнях, из-за труднообозримого количества связей и ограничений, из-за противоречивости задач, решаемых экономическими субъектами. В связи с этим потребовались новые подходы к экономическим исследованиям, к поиску оптимальных решений, в которых особо важную роль сыграли математические модели и методы анализа. Роль математики в экономическом анализе особенно возросла за последние пятьдесят лет. Это обусловлено, во-первых, уровнем развития экономической науки; во-вторых, глобальностью и сложностью решаемых экономических задач (обоснованное решение которых невозможно без определенного упрощения и формализации исследуемого объекта); в-третьих, научно-техническим прогрессом, всемирной компьютеризацией и великолепными результатами применения математических методов для обоснования и развития различных направлений экономических исследований.

В настоящий момент экономическая теория как на микро, — так и на макроуровне включает математические модели и методы как свой естественный необходимый элемент. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее значимые, определяющие элементы

и связи экономических субъектов, для исследования которых требуется высокая степень абстракции. Во-вторых, методы математики позволяют из математических моделей получить новые знания об исследуемом экономическом объекте, оценить форму и параметры зависимостей его переменных. В-третьих, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и обосновывать выводы.

Вернемся однако к истории развития экономико-математических моделей. Как уже отмечалось, математическое моделирование стало развиваться относительно недавно. Первая в мире количественная модель макроэкономики была предложена французом Ф. Кенэ в 1758г. Она стала известна под названием «экономическая таблица». С ее помощью автору удалось проследить движение совокупного национального продукта, обобщив многочисленные акты производства, обмена и распределения в единую картину. Хорошо известны основополагающие работы А. Смита (классическая макроэкономическая модель) и Д. Рикардо (модель международной торговли). Первой работой, в которой с помощью математических методов исследовались экономические вопросы, была «Математическая основа теории богатства», опубликованная О. Курно в 1838г. Однако в подавляющем большинстве работ того времени математические методы использовались в основном с иллюстративными целями. Но уже тогда роль математики для экономического анализа становилась все более значимой. Например, К. Маркс для описания законов общественного воспроизводства использовал математическую форму, что позволило наглядно представить сложные зависимости между отдельными элементами производства, потребления и накопления. На основе полученных соотношений он определил количественные параметры простого и расширенного воспроизводства в рамках общества. В XIX в. большой вклад в моделирование рыночной экономики внесла так называемая «математическая школа». Ее представители Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Эджуорт, У. Джевонс и др. достаточно широко использовали математические методы как средство анализа экономических явлений и процессов. Например, для поиска функциональных связей в изменениях цен, спроса, объемов производства и товарных запасов, для количественного описания и объяснения законов движения товарных цен на рынке. Переломным в плане использования математических методов и моделирования в экономических науках стал XX век. Математические методы становятся едва ли не основным инструментом экономического анализа. Подавляющее число лауреатов Нобелевской премии в области экономики активно использовали в своих теориях математические модели и методы. Среди них следует отметить В. Леонтьева, создавшего балансовый метод (балансовые модели, модели ввода-вывода, затраты-выпуск). Леонтьевские балансовые модели представляют собой шахматобразные таблицы, отличающиеся удобством моделирования взаимосвязей между большим количеством переменных (товары, секторы, регионы) при расчете равновесия, количественном определении последствий внешних воздействий (например, научно-технического прогресса) и исследовании устойчивости оптимальных решений. При этом для определения параметров модели достаточно иметь довольно короткие ряды данных (в экстремальных случаях — единственные наблюдения) в противоположность обычному эконометрическому анализу, требующему относительно длинного ряда наблюдений. Во время быстрых структурных изменений и ломок (например, вследствие распада СССР, переходного периода в Беларуси) это является одним из преимуществ балансовых моделей. Изучением моделей леонтьевского типа занимается наука «исследование операций» и, в частности, «линейное программирование» (об этих науках смотрите далее).

Безусловно, выдающийся вклад в развитие экономико-математических методов, да и всей экономики в целом внесла теория линейного программирования. Пионером в этой области является советский математик

нобелевский лауреат Л. Канторович. Значительную роль в развитии линейного программирования сыграли Д. Данциг и еще один нобелевский лауреат в области экономики Т. Купманс.

Среди других выдающихся экономистов, в основе теорий которых лежали математические модели и методы, можно назвать нобелевских лауреатов Р. Фриша, Я. Тинбергена, П. Самуэльсона, Д. Хикса, Л. Клейна, Ж. Дебре, Р. Солоу, Т. Хаавельмо и др.

В СССР экономико-математическое направление стало активно развиваться в 60-е, и здесь, кроме Л. Канторовича, можно отметить В. Немчинова, В. Новожилова, Н. Федоренко, Л. Понтрягина, В. Макарова, С. Шаталина и др. Исследования советских ученых в этом направлении были связаны с построением многоуровневых систем моделей народнохозяйственного планирования, оптимизационных моделей отраслей и предприятий. Сейчас на первый план выходят задачи моделирования процессов переходного периода.

## **9.2. Понятие экономико-математической модели**

Основным методом математического исследования экономических процессов является экономико-математическое моделирование.

Модель — условный образ объекта исследования, сконструированный для упрощения этого исследования.

Экономико-математическая модель есть описание экономических процессов или объектов, произведенное с целью их исследования и управления ими. Экономисты используют данные модели для формального, упрощенного описания и анализа экономических тенденций и ситуаций. При построении выделяют наиболее существенные факторы, определяющие исследуемое явление, и отбрасывают несущественные для решения поставленной задачи детали. Моделироваться могут как сами объекты и процессы, так и связи между ними. Модели обычно представляются в виде формул, графиков, рисунков, схем и т. д. Примерами экономических моделей являются модели равновесия, роста, модель фирмы, модель потребительского выбора, модели экономических циклов и др. Экономические модели позволяют выявить особенности функционирования экономических систем, оценить возможные последствия воздействия на них тех или иных факторов и на основе этого предсказать их поведение в будущем, а также использовать полученные знания в управлении этими системами. При этом полученные в модели количественные оценки позволяют дать более надежный прогноз, достигнуть планируемого результата с наименьшими потерями либо максимально быстро. Это безусловно важно как на микроуровне (на уровне управления предприятием), так и на макроуровне (при проведении государственной политики, например).

### Схема построения экономико-математической модели

может быть представлена в следующем виде:

1. Формулировка предмета и цели исследования.
2. Выделение существенных (доминирующих) элементов исследуемой экономической системы, определяющих ее функционирование. Оценка качественных характеристик (значений) этих элементов.
3. Определение и описание взаимосвязей между элементами модели на качественном уровне.
4. Формализация выделенных элементов и их взаимосвязей в виде математических выражений и графиков (построение математической модели).
5. Проведение расчетов по математической модели и имеющимся статистическим данным.
6. Анализ полученных результатов и совершенствование математической модели.
7. Использование полученных выводов для предсказания исследуемой экономической системы.

Без осуществления этапов 1—3 невозможно говорить о целенаправленности исследований. Этапы 4—5 определяют системность исследований. Этапы 6—7 придают модели обоснованность и определяют ее реальную ценность.

Никакая модель не является стопроцентным отражением действительности. В самом деле, при построении модели выделяются и учитываются лишь основные, доминирующие факторы функционирования рассматриваемого экономического объекта. При этом остаются без внимания другие факторы, которые при своей индивидуальной незначимости в совокупности могут если не существенно влиять на поведение исследуемого объекта, то определять значительные отклонения в его прогнозируемых параметрах. Например, в простейшей модели спроса предполагается, что величина спроса на некоторое благо определяется его ценой. При этом игнорируются такие, безусловно, важные в реальности факторы, как доходы потребителей, цены на другие товары, вкусы, ожидания, предпочтения потребителей и т. д.

С другой стороны, следует избегать необоснованного желания построить «идеальную» модель, учитывающую если не все, то подавляющее большинство реальных факторов и взаимосвязей. В этом случае происходит необоснованное «утяжеление» модели, скрывающее многие существенные ее характеристики, делающее возможные выкладки и расчеты настолько громоздкими и затруднительными, что затраты на построение и обработку модели будут сопоставимы, а то и превзойдут возможные выгоды от ее использования.

Таким образом, при построении любой экономической модели решают две противоположные задачи: модель должна быть как можно более простой (скупой); с другой стороны, модель должна достаточно качественно отражать реальность (быть адекватной) и соответствовать целям исследования. То есть необходимо, чтобы все факторы, явно не учтенные в модели, оказывали на моделируемый объект относительно малое результирующее воздействие в интересующем исследователя аспекте. При этом состав учитываемых в модели факторов и ее структура могут уточняться в ходе ее совершенствования.

Модель может быть построена тремя способами:

- в результате прямого наблюдения (феноменологический);
- в результате вычленения из более общей модели (дедуктивный);
- в результате обобщения более частных моделей (индуктивный).

Модель может описывать либо внутреннюю структуру исследуемого объекта, либо его поведение.

Итак, математическая модель экономического объекта — это адекватное целям исследования его отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков, построенное для исследования объекта математическими методами.

При этом различают описательные и оптимизационные модели.

В описательной (дескриптивной) модели выделяются факторы, показатели, ограничения, параметры и переменные. Они группируются в систему математических выражений, позволяющих проанализировать суть изучаемого экономического явления, понять его движущие силы и особенности. В качестве примера такой описательной модели можно привести модель межотраслевого баланса либо, например, основное макроэкономическое тождество

$$Y = C + I + G + NX,$$

где  $Y$  — совокупный доход,  $C$  — совокупное потребление,  $I$  — инвестиции,  $G$  — государственные расходы,  $NX$  — чистый экспорт.

В оптимизационной модели на основе систем уравнений и неравенств, описывающих ограничения объекта, а также критериев оптимальности определяются решения, при которых система функционирует в экстремальном режиме (либо максимально, либо минимально возможном).

Для наглядности описания оптимизационной модели рассмотрим следующий пример.

Пусть фирма может производить  $n$  видов продукции. Для их выпуска она использует три вида ресурсов: рабочую силу, оборудование (основной капитал) и сырье. Эти ресурсы однородны, количества их заданы и равны  $L, K, R$  соответственно, причем в данном производственном цикле они изменены (увеличены) быть не могут. Задан расход каждого ресурса на производство единицы продукции  $i$ -го вида ( $i=1, 2, \dots, n$ ):  $l_i, k_i, r_i$ . Заданы цены производимых продуктов:  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Необходимо определить объемы выпуска каждого из продуктов с целью максимизации дохода  $Y$  от их реализации.

Для решения данной задачи построим соответствующую математическую модель. Перед построением модели отметим, что в нее войдут переменные, которые заданы как бы извне и не изменяются в ходе всего производственного цикла — такие переменные называются экзогенными переменными модели. С другой стороны, в модель входят и переменные, которые определяются в ходе расчетов и не заданы извне. Такие переменные называются эндогенными переменными.

В данном случае значения объемов наличных ресурсов  $L, K, R$ , расходы данных ресурсов  $l_i, k_i, r_i$  на единицу выпуска  $i$ -го вида продукции, а также цена  $p_i$  единицы  $i$ -го вида продукции — экзогенные переменные.

Переменными, которые не заданы извне и которые необходимо определить в ходе расчетов, являются объемы выпусков продукции  $i$ -го вида. Обозначим их  $x_i$ .

После описания переменных и параметров перейдем к формализации решаемой задачи, то есть к описанию ее целей, условий и ограничений в виде математических формул.

Цель состоит в максимизации дохода, который можно записать следующим образом:

$$Y = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_ix_i \rightarrow \max.$$

Но при этом имеются ограничения на использование ресурсов, которые состоят в том, что невозможно использовать ресурсов больше, чем имеется в наличии. Эти ограничения могут быть представлены следующими неравенствами:

$$l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n \leq L$$

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n \leq K$$

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n \leq R$$

Эти неравенства необходимо дополнить требованием неотрицательности переменных  $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Объединив целевую функцию с условиями ограничений, получаем так называемую оптимизационную модель. Построенная математическая модель является хорошо известной в теории задач линейного программирования (ЗЛП).

В ряде случаев данная модель достаточно реалистична и вполне допустима для анализа производства. В других случаях данная модель имеет слишком много допущений и упрощений и поэтому не всегда хорошо соответствует реальности. Приведем ряд условий, которые могут быть в реальности, но не учитываются в предложенной модели:

- ресурсы могут быть в определенной степени взаимозаменяемы;
- объемы ресурсов могут не быть строго фиксированными, а могут покупаться, продаваться, браться или сдаваться в аренду;

- затраты ресурсов на соответствующую продукцию могут не быть строго пропорциональными объему ее выпуска;
- цены продукции могут зависеть от объемов выпуска, т.е. не быть постоянными;
- фирма может использовать различные технологии для выпуска одного и того же набора продукции, затрачивая при этом различные количества ресурсов;
- цели фирмы могут не ограничиваться максимизацией дохода, что потребует учета дополнительных количественных и качественных показателей;
- для фирмы реально решаемая задача может не ограничиваться одним производственным циклом, и поэтому потребуются решение данной задачи в динамике;
- в задаче могут присутствовать определенные случайные факторы (заболел рабочий, сломался станок, изменилось качество сырья), которые в ряде случаев должны быть учтены.

Возможны и другие ограничения и условия. Но и приведенных выше достаточно, чтобы продемонстрировать, на сколько реальность может быть сложнее модели. Однако в значительном количестве случаев решение даже такой упрощенной модели дает вполне удовлетворительный и зачастую наилучший результат.

### 9.3. Основные типы моделей

Классификация моделей зависит от целей исследования, используемого инструментария, структуры исследуемых объектов, области использования и т. д. Приведем наиболее массовые типы экономико-математических моделей:

- макроэкономические и микроэкономические модели;
- теоретические и прикладные модели;
- описательные, равновесные и оптимизационные модели;
- статические и динамические модели;
- детерминированные и стохастические (вероятностные) модели.

Макроэкономические модели описывают экономику государства или какой-либо крупной отрасли как единое целое, связывая между собой укрупненные (агрегированные) экономические показатели в натуральном или денежном выражении: ВВП, ВВП, экспорт, импорт, занятость, инвестиции, процентная ставка, предложение денег, обменный курс и т. д. Хорошо известны межотраслевая балансовая модель Леонтьева, кейнсианская модель, модели макроэкономической динамики (модель Харрода—Домара, модель Солоу), модели экономических циклов, общего экономического равновесия, макроэкономическая производственная функция и др. модели.

Микроэкономические модели описывают поведение, структуру и взаимосвязи различных экономических субъектов (индивидуумов, домашних хозяйств, фирм и т. д.)

Вследствие разнообразия типов экономических субъектов и форм их взаимосвязей на рынке микроэкономическое моделирование является существенной частью экономико-математических методов. Среди этих моделей хорошо известны модели «спрос-предложение», модель фирмы (предельный анализ), модель потребительского выбора, модель Р. Стоуна, оптимизационные задачи с ограничениями, микроэкономические производственные функции, модели теории игр и другие модели.

Теоретические модели изучают общие свойства экономики или ее отдельных элементов на теоретическом уровне дедукцией выводов из формальных предпосылок. К таким моделям можно отнести,



например, модели рыночного равновесия, кейнсианскую модель, модели роста Харрода—Домара и Солоу, модель Р. Стоуна потребительского выбора и т. д.

Прикладные модели оценивают параметры функционирования конкретного экономического объекта, исходя из имеющейся реальной ситуации, дают рекомендации для принятия конкретного практического решения. К прикладным относятся модель межотраслевого баланса, модели математического программирования при их применении к конкретной ситуации, экономические модели, оперирующие реальными статистическими данными, позволяющими оценивать значения неизвестных параметров.

Описательные (дескриптивные) модели — модели, в которых с помощью выделения существенных элементов и переменных, установления и описания их структуры и связей в виде математических формул и графиков получают более глубокие и разносторонние знания об исследуемом экономическом объекте и наглядное представление о его функционировании и развитии. В качестве моделей, рассматриваемых как описательные, можно привести модель «спрос-предложение», паутинообразную модель, модель Харрода—Домара и т. д.

Равновесные модели описывают такие состояния экономики или экономических систем, когда результирующая всех сил, выводящих ее (их) из данного состояния, равна нулю. Равновесные модели обычно носят описательный характер. К моделям данного типа относятся модель «спрос-предложение», основное макроэкономическое тождество и т. д.

Оптимизационные модели — модели, с помощью которых определяют экстремальные параметры функционирования экономической системы и оптимальные с точки зрения рассматриваемого критерия параметры данной системы. К моделям данного типа можно отнести модель потребительского выбора, максимизации прибыли фирмы, модели теории игр, сетевые модели и т. д. Отметим, что оптимизация в рыночной экономике присуща в основном задачам на микроуровне. На макроуровне оптимальное (рациональное) решение состоит в определении равновесных состояний исследуемых объемов (модель межотраслевого баланса Леонтьева, макроэкономическая производственная функция и т. д.).

Статические модели описывают состояние экономического объема в конкретный момент или период времени, т. е. их параметры и элементы не зависят от времени. К таким моделям можно отнести общую модель равновесия, модель фирмы, оптимизационные задачи с ограничениями, балансовые модели и т. д. Обычно такие модели строятся по перекрестным данным.

Динамические модели рассматривают экономические модели во временном развитии. В этих моделях фактор времени рассматривается как существенный параметр. Среди таких моделей можно отметить паутинообразную модель, модели Харрода—Домара и Солоу, производственную функцию с учетом научно-технического прогресса, циклические модели и т. д. Отметим, что динамическая модель не сводится к простой сумме статических моделей, а описывает развитие элементов и их взаимосвязей во времени. В качестве инструмента решения в данных моделях обычно используется аппарат разностных и дифференциальных уравнений, вариационного исчисления.

Детерминированные модели — это модели, предполагающие фиксированные, однозначно определенные связи между переменными моделями. К моделям данного типа относятся, например, модель равновесия, модель фирмы, модели линейного программирования и многие другие.

Стохастические (вероятностные) модели предполагают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели модели. Данные модели являются интенсивно развивающимися и используют аппарат теории вероятностей и математической статистики. К моделям данного типа, в основном, относятся

эконометрические модели, использующие реальные статистические данные, а также модели стохастического программирования.

#### **9.4. Математическая экономика, эконометрика, исследование операций**

В силу относительной новизны методов, моделей и научных дисциплин, описывающих и исследующих экономические процессы и объекты, их классификация в некоторой степени условна и до сих пор совершенствуется. Новые экономические задачи стимулируют разработку новых методов, расширяющих диапазон применения математики в экономических исследованиях. В ряде случаев для решения поставленных экономических задач приходится использовать модели и методы различных математических дисциплин. Именно на стыке дисциплин порой достигаются наиболее интересные результаты в экономико-математическом моделировании.

Для классификации используемых в экономике математических методов выделим три основных, с нашей точки зрения, раздела экономико-математических исследований: математическая экономика, эконометрика и исследование операций.

Математическая (численная) экономика — это раздел экономической науки, занимающийся анализом свойств и решений математических моделей экономических процессов. Предметом исследования математической экономики являются базовые теоретические модели экономики. Можно сказать, что математическая экономика изучает теории и постулаты экономической науки в форме экономико-математических моделей, т. е. представляет ее с точки зрения математики. Задачей математической экономики является описание отношений и процессов, происходящих в экономике, с помощью математических формул и их анализ на основе математических методов. С этой целью используется разнообразный и мощный математический аппарат, основанный на методах дифференциального и интегрального исчисления, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и др.

Математическая экономика развивалась под сильным влиянием идей англо-американской школы политической экономии. В работах представителей этого направления, в частности Дж. фон Неймана, К. Эрроу, М. Моришимы, Х. Никайдо, Р. Солоу и др., можно найти множество примеров использования математических методов исследования экономических процессов как в теории, так и на практике.

Среди моделей математической экономики можно выделить два крупных класса — модели равновесия в экономических системах и модели экономического роста. В моделях равновесия (например, модель баланса В. Леонтьева, модель Вальраса—Вальда, модель Эрроу—Дебре и т. д.) исследуются состояния экономических систем, в которых равнодействующая всех внешних сил равна нулю. Эти модели относятся к классу так называемых статических моделей. Изменения же экономических систем во времени анализируются динамическими моделями (модель Харрода—Домара, модель Р. Солоу, модель Дж. фон Неймана, модели магистрального типа и др.). Центральным моментом изучения моделей роста являются анализ и отыскание траекторий стационарного роста (роста с постоянными, в том или ином смысле, характеристиками), к выводу на которые стремится обычно исследуемая экономическая система. Изучение траекторий стационарного роста является одновременно и основой для анализа более сложных типов роста, и связующим звеном с моделями экономического равновесия (т. к. отыскание такой траектории равносильно определению изменяющегося со временем равновесного состояния). Значительный вклад в теорию роста внесли работы Дж. фон Неймана, Р. Солоу, Е. Домара, Р. Харрода, М. Моришимы и др.)



От математической экономии, которая исследует экономические процессы в основном на теоретическом уровне, отделяется другой раздел экономической теории — эконометрика

Эконометрика — наука, исследующая количественные закономерности и взаимосвязи в экономике на базе методов теории вероятностей и математической статистики. В основе эконометрики лежат методы регрессионно—корреляционного анализа.

Первые работы по эконометрике появились в конце XIX начале XX века. В 1897 г. вышла работа одного из основоположников математического направления в экономике В. Парето. Она была посвящена статистическому изучению доходов населения в разных странах. Была предложена кривая Парето  $y = b \cdot (x - x_0)^{-\alpha}$ , где  $x$  — величина дохода;  $y$  — численность лиц, имеющих доход больший, чем  $x$ ;  $x_0$  — минимальный доход;  $b$  и  $\alpha$  — параметры модели, получаемые статистическими методами.

В начале XX в. вышло несколько работ английского статистика Гукера, в которых он использовал разработанные Пирсоном и его школой корреляционно—регрессионные методы для изучения взаимосвязей экономических показателей (в частности, влияние числа банкротств на товарной бирже на цену зерна). В работах Гукера содержалась идея временного лага между экономическими переменными, а также корреляционного анализа не самих величин, а их приращений.

В 20-е гг. с помощью создания так называемых «барометров развития» безуспешно пытались предсказывать поведение товарного и денежного рынков. Непредвиденный по этим моделям кризис 1929 — 1933 гг. привел к критическому пересмотру методов анализа, применявшихся в экономике. В исследованиях начали учитывать случайные аспекты экономических явлений. Основателями эконометрики считаются Р. Фриш, Э. Шумпетер, Я. Тинберген. Все они являлись сторонниками кейнсианства и старались согласовать соответствующую этой школе экономическую теорию с математическими и статистическими методами. Именно Р. Фриш ввел в обиход термин «эконометрика» (экономия + метрика), дословно обозначающий «измерения в экономике». В 1928 г. были опубликованы работы Ч. Кобба и П. Дугласа о производственной функции с возможной заменой факторов. На основе статистических данных в обрабатывающей промышленности США за период 1899 — 1922 гг. они представили функцию  $Y = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$ , где  $Y$ ,  $L$ ,  $K$  — объем выпуска, затраты труда и капитала,  $\alpha$ ,  $b$  — параметры модели. Это была первая эмпирическая производственная функция, построенная по данным временных рядов. В настоящее время производственная функция Кобба-Дугласа широко используется как для научных, так и для учебных целей.

Комплексные эконометрические модели на макроуровне появились только после второй мировой войны. Одной из первых моделей такого типа в США была модель Клейна—Гольдберга. Она послужила фундаментом, на котором базировался ряд краткосрочных моделей комплексного развития, и состояла из 15 регрессионных уровней, 5 тождеств и охватывала 40 макроэкономических показателей. Параметры модели были оценены на базе временных рядов за 20 лет.

Среди других наиболее известных эконометрических моделей отметим «Голландскую модель», построенную для анализа и разработки экономической политики. А также Бруклинскую модель, которая является типичным примером экстенсивного подхода к конструированию эконометрических моделей. Все блоки ее первого варианта содержали 359 уравнений. При объединении в комплексную модель число уравнений снизилось до 226 (170 регрессионных уравнений и 56 балансовых тождеств).

Сильным импульсом в развитии эконометрики явилось создание эконометрического общества в 1930 г. и организация журнала «Эконометрика» в 1933 г. Ну и конечно, своего расцвета эконометрика как наука, работающая с огромным количеством статистических данных, достигла в результате широкой

компьютеризации экономических исследований и применения специальных эконометрических пакетов прикладных программ.

Итак, если математическая экономика занимается выражением экономической теории в математической форме, то эконометрика изучает математические модели в конкретных ситуациях. На основании реальных статистических данных эконометрика подтверждает или опровергает то или иное теоретическое утверждение, дает новые знания об исследуемом объекте. То есть эконометрика является своеобразным «мостом» между реальностью и теорией. Например, в теории хорошо известно, что при прочих равных условиях с ростом цены на некоторое благо спрос на него падает. Но возникает вопрос, по какому закону этот спрос падает (какова функциональная зависимость между ценой и спросом), каковы параметры построенной функциональной зависимости, каковы возможные ошибки при использовании выбранной модели? На все эти вопросы отвечает эконометрика, основываясь при этом на реальных статистических данных.

Таким образом, главными задачами эконометрики являются:

- сбор и обработка статистических экономических данных;
- проверка гипотез о поведении экономических объектов или величинах экономических показателей;
- спецификация (выбор формы) эконометрической модели, соответствующей реальности;
- параметризация (определение параметров) выбранной эконометрической модели;
- верификация модели (проверка модели на адекватность реальным статистическим данным);
- использование полученной модели для анализа исследуемого экономического процесса и прогноза его поведения;
- получение новых знаний об исследуемом объекте и их использование для совершенствования экономической теории и проведения целенаправленной экономической политики.

Основными методами эконометрики являются:

- выборочный метод;
- дисперсионный анализ;
- корреляционный анализ;
- регрессионный анализ;
- методы проверки статистических гипотез и др.

Теория и практика эконометрического моделирования приобретает в современных экономических исследованиях все возрастающее значение. В настоящий момент эконометрические модели и методы — это мощный инструмент, позволяющий получать новые знания об экономике, изучать и количественно определять внутренние и внешние причинно-следственные связи между показателями экономических систем, устанавливать закономерности их формирования и тенденции развития. С другой стороны, эконометрический анализ — это широко применяемый аппарат для принятия практических решений в бизнесе, финансовом, банковском и инвестиционном анализе, прогнозировании и, конечно же, проведении макроэкономической политики.

Отметим еще одно очень важное направление использования математических методов в экономических исследованиях, которое можно объединить под общим названием «исследование операций».

Многие исследователи рассматривают данный раздел как составную часть математической экономики. Однако, хотя большинство моделей исследования операций вызвано потребностями экономики, все

же комплекс задач, решаемых с его помощью, существенно шире, и ограничение данного раздела лишь экономическими задачами представляется неправомерным.

Исследование операций — прикладное направление математики, используемое для решения организационных (в частности, экономических) задач.

Главный метод исследования операций состоит в системном анализе целенаправленных действий при объективной (зачастую количественной) сравнительной оценке возможных результатов этих действий. Например, получение большей прибыли требует расширения объема выпуска продукции, что может быть достигнуто путем расширения предприятия, его реконструкции, внедрения новых технологий, использования новых ресурсов и сырья, расширения рекламной кампании, рынков сбыта и т. д. Возникает вопрос, какие направления и в какой пропорции следует развивать для достижения максимальной прибыли при определенных условиях (ограничениях).

Для решения столь сложных комплексных задач приходится привлекать специалистов из разных областей знаний: экономистов, математиков, инженеров, специалистов по маркетингу и рекламе, социологов и т. д.

Сущность задач исследования операций — поиск путей рационального использования имеющихся ресурсов для достижения поставленной цели. Данные задачи достаточно сложны из-за своей большой размерности, огромного количества возможных вариантов решения и, зачастую, не могут быть решены эффективно при современном уровне развития знаний.

Обширный комплекс решаемых задач привел к дроблению исследования операций на ряд относительно самостоятельных разделов, таких, как математическое программирование (задачи управления запасами, распределение ресурсов), теория игр, системы массового обслуживания, теория расписаний (календарное планирование), теория графов и т. д.

Математическое программирование изучает теорию и методы решения задач на нахождение экстремума функций (показателя качества решения) при ограничениях в форме уравнений и неравенств. Общая задача математического программирования состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных при этом должны принадлежать некоторой области допустимых значений. В общем виде задача записывается так:

$$Y=f(x) \rightarrow \max$$

$$X \in D,$$

где  $X = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор переменных;  $Y=f(x)$  — целевая функция,  $D$  — область допустимых значений переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Например, задача максимизации объема выпуска при ограничении на ресурсы, задача максимизации полезности в модели потребительского выбора либо задача минимизации издержек при необходимом минимуме выпуска могут быть сформулированы в терминах данной модели.

В зависимости от вида целевой функции и области  $D$  выделяют следующие разделы математического программирования: линейное программирование, целочисленное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, стохастическое программирование.

Линейное программирование — раздел математического программирования, характеризующийся линейными зависимостями между переменными и линейной целевой функцией:

$$Y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr} (\max, \min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, i=1,2,\dots, m$$

$$x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n$$

Обозначения можно трактовать следующим образом:

$b_i$  — количество ресурса  $i$ -го вида,

$m$  — количество видов ресурсов,

$a_{ij}$  — норма расхода  $i$ -го ресурса на единицу  $j$ -го продукта,

$x_j$  — количество продукции  $j$ -го вида, причем таких видов  $n$ ,

$c_j$  — доход от единицы продукции  $j$ -го вида.

(Пример данной задачи подробно рассмотрен в п. 9.2.).

В экономике широко используются модели линейного программирования. Например, задача размещения производства (транспортная задача), расчета рациона питания (задача о диете), наилучшего использования материалов (задача о раскрое), распределение ресурсов по необходимым работам (распределительная задача) и т. д.

Среди методов решения подобных задач наиболее распространены симплекс-метод, декомпозиционные методы (решения крупноразмерных задач), методы динамического программирования.

Л. Канторович, являющийся пионером в области линейного программирования, в 1939 г. математически решил следующие задачи: о раскрое материалов с наименьшими расходами, о наилучшей загрузке машин, о распределении ресурсов по нескольким видам транспорта и др. При этом он разработал универсальный метод решения подобных задач, а также различные алгоритмы его реализации.

В 40 — 50-е гг. большой вклад в данную область сделали экономист Т. Купманс и математик Дж. Данциг, которому принадлежит термин «линейное программирование». За свои достижения в области экономики Л. Канторович и Т. Купманс были удостоены Нобелевской премии.

Можно смело утверждать, что успехи в области линейного программирования открыли новую страницу в сфере приложения математических методов для экономического анализа, сделав их во многих случаях доминирующими.

В ряде задач линейного программирования одним из ограничений является целочисленность их переменных. Это не позволяет использовать для их решения методы, предложенные для обычных задач линейного программирования. В этом случае говорят о задачах целочисленного программирования (например, задача о максимальном выпуске «неделимой» продукции при ограничениях на ресурсы, задачи теории расписаний и др.).

Экстремальные задачи с нелинейной целевой функцией и ограничениями на переменные относятся к разделу нелинейного программирования (например, задача потребительского выбора, задача определения максимальной прибыли могут быть описаны данной моделью). Задачи данного типа весьма громоздки и сложны, и для их решения обычно используются численные методы.

Динамическое программирование — раздел математического программирования, позволяющий находить оптимальные решения на основании вычисления последствий каждого решения и выработке оптимальных стратегий для последовательности решений. Р. Беллман внес наибольший вклад в данный раздел,

к которому относятся задачи планирования оптимальной деятельности фирмы, задачи оптимального распределения ресурсов и т. д.

Среди активно развивающихся других направлений математического программирования можно выделить стохастическое программирование, весьма важное для экономических приложений.

Задачи математического программирования, в которых параметры могут быть случайными величинами, а коэффициенты содержать случайные элементы, называются задачами стохастического программирования. Вероятностный характер многих экономических задач обусловлен неполнотой информации об их условиях и такими весьма непредсказуемыми элементами, как человеческий фактор, природные условия, непредвиденные случайные помехи, конфликтные ситуации и т. д. То есть по своему характеру изучение экономических процессов требует именно вероятностного (стохастического) подхода для более реалистического отражения действительности в экономико-математических моделях, чем это возможно при детерминированной постановке. Многие задачи финансового и инвестиционного анализа моделируются в стохастическом программировании.

Интересным направлением математики для исследования экономических ситуаций является теория игр.

Теория игр — это раздел исследования операций, изучающий математические модели принятия решений в так называемых конфликтных ситуациях, весьма характерных для экономики. Основоположниками этой теории являлись Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн.

Игровые подходы и модели нашли очень широкое применение в экономическом анализе. Данными подходами пользуются, например, при разработке экономических моделей, в которых учитываются интересы различных субъектов (отраслей, фирм, стран и т. д.). Активно применяются приемы теории игр и для решения многих практических экономических задач на промышленных предприятиях, например, для выбора оптимальных решений в области повышения качества продукции или при определении наличия запасов. Конфликтные ситуации в этих случаях могут интерпретироваться следующим образом:

- выпускать больше продукции или выпускать продукцию лучшего качества (меньше труда на единицу выпуска или больше);
- запастись больше ресурсами (и быть застрахованными от случайностей) или запастись меньше ресурсами (и не замораживать средства).

В настоящее время теория игр динамично развивается и находит все больше приложений как в теории, так и на практике.

Многие процессы в экономике можно моделировать в рамках теории массового обслуживания, предметом исследования которой являются вероятностные модели реальных систем обслуживания. В данных моделях в случайные моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеется устройство для обслуживания этих заявок. Например, систему производства и потребления товаров можно трактовать как систему обслуживания, где встречаются покупатели (своеобразные заявки) и продавцы (устройства обслуживания). Целью решения данных моделей является, например, обслуживание покупателей (заявок) максимально быстро (с наименьшим ожиданием в очередях), но при достаточной загруженности продавцов (без простоев устройств обслуживания).

Пионерами в области систем массового обслуживания являлись А. Хинчин, Пальм, Эрланг.

Интересным с точки зрения наглядной интерпретации и полученных результатов является моделирование экономических систем в рамках теории графов, объектами исследования которой являются

графы (деревья, сети и т. п.). Граф — это совокупность некоторых элементов (вершин) с соответствующими парными отношениями между ними (дугами). Графом может моделироваться схема автомобильных дорог, сложный производственный комплекс, состоящий из различных экономических субъектов со своими отношениями, и т. д. С помощью методов теории графов решаются многие практические экономические задачи. В частности, широко известны задача о коммивояжере, задача о максимальном потоке в сети и т. д. На теории графов основаны сетевые методы планирования и управления.

Очень серьезные практические экономические результаты получены на базе моделей теории расписаний, посвященной разработке методов оптимизации оперативно-календарного планирования. Типичной моделью этой дисциплины является следующая: имеется набор  $n$  требований, которые необходимо обслужить  $m$  приборами оптимальным образом с точки зрения определенного критерия (за минимальное время, в определенный срок, за минимальное суммарное время и т. д.). При этом заданы времена обслуживания требований каждым из приборов и возможные технологические ограничения.

Задачи данной дисциплины отличаются значительной трудоемкостью, вызванной огромным числом вариантов упорядочения обслуживания, быстро растущим с ростом числа требований и приборов. При их решении используются методы математического программирования, приближенные методы, статистические методы в сочетании с комбинаторным анализом.

Для описания сложных макроэкономических систем используются модели межотраслевого баланса. Межотраслевой баланс — каркасная модель экономики (таблица, в которой показываются многообразные натуральные и стоимостные связи в макроэкономической системе). Анализ межотраслевого баланса дает комплексную характеристику процесса формирования и использования совокупного общественного продукта. Создателем математической модели межотраслевого баланса являлся лауреат Нобелевской премии В. Леонтьев. Основные методы межотраслевого баланса — это методы линейного программирования.

Важным направлением экономико-математического моделирования является экономическая кибернетика — приложение общих законов кибернетики к изучению экономических явлений и управлению экономическими процессами. Экономическая кибернетика позволяет автоматизировать управление на основе переработки информации и принятия решений. В экономическую кибернетику включают системный анализ, теорию экономической информации, теорию управляющих систем в экономике.

#### 9.5. Состояния и перспективы

Применение математических методов, экономико-математическое моделирование в экономических исследованиях бурно прогрессирует в последние пятьдесят лет. В настоящее время ни одно серьезное экономическое исследование не может обойтись без подкрепления своих выкладок математическими моделями или формулами. Области применения математических методов в экономике постоянно расширяются и углубляются, также совершенствуются и сами методы. В настоящее время экономико-математические дисциплины переживают расцвет и прогресс. Подавляющее большинство лауреатов Нобелевской премии в области экономики использовали экономико-математические методы и моделирование если не для вывода, то, по крайней мере, для обоснования своих теорий. Для понимания значения современной математики в экономических исследованиях следует помнить ряд обстоятельств, делающих ее применение в экономике весьма эффективным.



- Математика привносит конкретику в экономику. Математика заставляет экономистов неясное содержание вводимых ими терминов, расплывчатые выражения и формулировки заменять четкими понятиями, точным перечислением заданных величин, строгой формулировкой предпосылок, условий и выводов.
- Математика позволяет путем соответствующих выкладок прийти к количественному выражению таких соотношений, которые затруднительно и зачастую невозможно было бы получить путем логических словесных рассуждений или простых арифметических приемов. Другими словами, математика является мощнейшим инструментом экономического исследования.
- Математика дает возможность установить связи между явлениями и факторами, которые можно не заметить на интуитивном уровне даже в достаточно общей форме. То есть математика дает новые знания об объекте исследования.
- Математика позволяет наглядно и достаточно доступно объяснить суть многих экономических процессов и явлений.

Разумеется, предметная область, методология и инструментарий экономической науки не ограничиваются подходами математической экономики, эконометрики и исследования операций. Кроме них, в экономических исследованиях используются методы качественного анализа, эвристические подходы, индуктивные и дедуктивные методы. При этом математические методы все шире становятся теоретической базой и элементами прикладных и теоретических выводов и решений.

Отмечая исключительную важность математики в экономических исследованиях, следует, однако, предостеречь от абсолютизации возможностей математики в данном контексте. Жизнь и, в частности ее экономическая составляющая, значительно богаче и разнообразнее любых схем и моделей. Поэтому выводить экономические теории только на основании математических моделей — занятие в достаточной степени сомнительное. Неверные исходные теоретические предпосылки при правильном использовании математического аппарата могут привести к совершенно необоснованным выводам и повлекут неоправданные экономические действия. С другой стороны, намеренное упрощение реальности в математических моделях может обернуться ситуацией, когда красота математических выкладок искажает реальную ситуацию. Так, иногда аппарат линейного программирования используется там, где связи носят нелинейный характер. При этом делается столь много допущений, что это не позволяет считать полученный вывод верным. Аналогичную картину можно наблюдать в регрессионно-корреляционном анализе и ряде других областей.

Однако последние достижения в области математики и компьютеризации дают возможность приблизить модели к реальности. Совершенствование математических методов и алгоритмов позволяет получать результаты, которые совсем недавно представлялись недостижимыми. Поэтому игнорирование столь мощного инструмента экономического исследования как математика, безусловно, отдаляет получение обоснованных экономических выводов и решений. Ситуацию здесь можно сравнить с необходимостью проведения земляных работ, которые можно осуществлять либо с использованием лишь кирки и лопаты, либо с помощью землеройной техники. Во многих случаях такие работы могут быть выполнены как одним способом, так и другим. Но, очевидно, второй способ более экономичный. Прямая аналогия между землеройными работами и экономикой, а также между землеройной техникой и математикой здесь достаточно прозрачна. Конечно, в ряде случаев применение техники затруднительно или невозможно, но в большинстве случаев только она дает приемлемый результат (с точки зрения времени и затрат ресурсов).

Из всего вышесказанного логичен следующий вывод: действительно серьезные результаты в экономических исследованиях могут быть достигнуты на стыке экономической теории с математикой. Любую

теоретическую модель, обобщающую конкретные факты, следует дополнить математической интерпретацией и соответствующими математическими выкладками. Это позволит получить обоснованные выводы, избежать потери каких-либо важных частных случаев и использовать имеющуюся эмпирическую информацию для проверки и обоснования соответствующих теоретических выкладок. При этом следует вспомнить слова известного специалиста в области операций Т. Саати: «Исследование операций определяет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими способами...».

#### Литература.

- Аллен Р. Математическая экономия. М., 1963.
- Баумоль У. Экономическая теория и исследование операций. М., 1965.
- Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.
- Грубер Й. Эконометрия. Т. 1, 2. Киев., 1996.
- Данциг Дж. Линейное программирование, его применение и обобщение. М., 1966.
- Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М., 1976.
- Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964.
- Канторович Л., Горстко А. Оптимальные решения в экономике. М., 1972.
- Канторович Л. В. и др. Экономика и оптимизация. М., 1990.
- Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия: В 2 т. М., 1977.
- Кобринский Н. Е. Основы экономической кибернетики. М., 1969.
- Ланкастер К. Математическая экономика. М., 1972.
- Леонтьев В. В. Экономические эссе: теории, исследования, факты и политика. М., 1990.
- Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь. М., 1993.
- Маленко Э. Статистические методы эконометрии. М., 1975.
- Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. М., 1975.
- Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.
- Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. М., 1965.
- Новожилов В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М., 1967.
- Применение математики в экономических исследованиях / Под ред. В. С. Немчинова. М., 1961.
- Саати Т. Л. Математические методы исследования операций. М., 1963.
- Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М., 1965.
- Саати Т. Л. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М., 1973.
- Тинтнер Г. Введение в эконометрию. М., 1965.
- Федоренко Н. П., Гольштейн Е. Г., Ким К. В. Математический аппарат экономического моделирования. М., 1983.
- Форд Л., Фалкерсон Д. Потoki в сетях. М., 1966.
- Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., 1967.
- Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., 1963.
- Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., 1974.
- Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М., 1974.